

BREVET 8

PONDICHERY - AVRIL 2009

CORRECTION

ACTIVITES NUMERIQUES (12 points)

EXERCICE 1 :

1. Calcul de A :

$$A = \frac{7}{15} - \frac{4}{15} \times \frac{5}{8}$$

Nous avons (la multiplication est prioritaire) :

$$A = \frac{7}{15} - \frac{4 \times 5}{15 \times 8}$$

$$A = \frac{7}{15} - \frac{4 \times 5}{3 \times 5 \times 2 \times 4}$$

$$A = \frac{7}{15} - \frac{1}{6} = \frac{14}{30} - \frac{5}{30} = \frac{9}{30} = \frac{3 \times 3}{3 \times 10} = \frac{3}{10}$$

$$A = \frac{3}{10}$$

2. Calcul de B :

$$B = 3\sqrt{2} - \sqrt{98}$$

a) Valeur arrondie au centième de B :

Généralement, cette question apparaît après le calcul. Nous allons donc, à l'aide de la calculatrice « calculer » cette expression :

$$\boxed{3} \boxed{\times} \boxed{\sqrt{2}} \boxed{-} \boxed{\sqrt{98}} \boxed{=}$$

Le résultat est - 5.656 soit

$$B \approx - 5,66$$

b) Calcul de B :

$$B = 3\sqrt{2} - \sqrt{98}$$

$$B = 3\sqrt{2} - \sqrt{49 \times 2} = 3\sqrt{2} - 7\sqrt{2} = - 4\sqrt{2}$$

$$B = - 4\sqrt{2}$$

EXERCICE 2 :

1. - 2 est-il solution de l'inéquation : $3x + 12 < 4 - 2x$?

Méthode 1 : Calculons séparément les deux membres de cette inéquation, en remplaçant x par - 2 .

Nous avons :

$$3x + 12 = 3 \times (- 2) = 12 = - 6 + 12 = 6$$

et

$$4 - 2x = 4 - 2 \times (- 2) = 4 + 4 = 8$$

Or $6 < 8$, donc

- 2 est une solution de l'inéquation donnée.

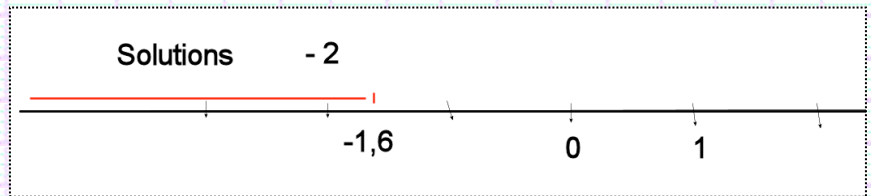
Méthode 2 : Il suffit de résoudre l'inéquation !

$$3x + 12 < 4 - 2x$$

$$3x + 2x < 4 - 12$$

$$5x < - 8$$

$$x < \frac{-8}{5} \quad \text{soit } x < -1,6$$



2 est donc solution de cette inéquation.

2. -2 est-il solution de l'équation : $(x - 2)(2x + 1) = 0$?

Méthode 1 : Calculons séparément le premier membre de cette $(x - 2)(2x + 1)$ équation, en remplaçant x par -2 .

Nous avons :

$$(x - 2)(2x + 1) = (-2 - 2)(2 \times (-2) + 1) = -4 \times (-4 + 1) = -4 \times (-3) = 12$$

Or $12 \neq 0$, donc

-2 n'est pas solution de l'équation donnée.

Méthode 2 : Il suffit de résoudre l'inéquation !

$$(x - 2)(2x + 1) = 0$$

Donc :

$$x - 2 = 0 \quad \text{ou} \quad 2x + 1 = 0$$

$$x = 2 \quad \text{ou} \quad 2x = -1$$

$$x = 2 \quad \text{ou} \quad x = -\frac{1}{2}$$

Les solutions de cette équation sont 2 et $-\frac{1}{2}$. Donc le nombre -2 n'est pas solution de cette équation.

3. -2 est-il solution de l'équation : $x^3 + 8 = 0$?

Nous ne savons pas résoudre cette équation à notre niveau.

Le seul moyen est donc de remplacer x par -2 et de vérifier si égalité il y a.

$$x^3 + 8 = (-2)^3 + 8 = -8 + 8 = 0$$

Donc

-2 est solution de l'équation donnée.

4. Le couple $(-2 ; 1)$ est-il solution du système
$$\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ x + 5y = 3 \end{cases}$$

Nous avons comme précédemment deux méthodes : soit vérifier que le couple $(-2 ; 1)$ est solution de la première et de la deuxième équation, soit résoudre le système et ...conclure.

Nous utiliserons la première méthode :

▷ $(-2 ; 1)$ est-il solution de la première équation ?

Calculons le premier membre :

$$2x + 3y = 2 \times (-2) + 3 \times 1 = -4 + 3 = -1$$

Nous trouvons -1 , donc le couple $(-2 ; 1)$ est solution de la première équation.

▷ $(-2 ; 1)$ est-il solution de la deuxième équation ?

Calculons le premier membre :

$$x + 5y = -2 + 5 \times 1 = -2 + 5 = 3$$

Nous trouvons 3 , donc le couple $(-2 ; 1)$ est solution de la deuxième équation.

▷ $(-2 ; 1)$ est donc solution du système

$(-2 ; 1)$ est donc solution du système

EXERCICE 3 :

1. PGCD de 238 et 170 :

Utilisons l'algorithmme d'Euclide.

Nous avons :

Premier nombre	Deuxième nombre	Reste dans la division euclidienne	
238	170	150	$238 = 170 \times 1 + 68$
170	68	34	$170 = 68 \times 2 + 34$
68	34	0	$68 = 34 \times 2$

Donc :

$$P.G.C.D. (238 ; 170) = 34$$

2. Forme irréductible de la fraction $\frac{170}{238}$:

$$\frac{170}{238} = \frac{34 \times 5}{34 \times 7} = \frac{5}{7}$$

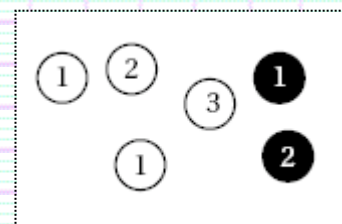
$$\frac{170}{238} = \frac{5}{7}$$

EXERCICE 4 :

Énoncé :

Un sac contient six boules : quatre blanches et deux noires. Ces boules sont numérotées :

Les boules blanches portent les numéros 1 ; 1 ; 2 et 3 et les noires portent les numéros 1 et 2.



▷ Question numéro 1 :

Il y a 4 boules blanches sur 6 boules. La probabilité de tirer une boule blanche est $\frac{4}{6}$ soit, en simplifiant $\frac{2}{3}$.

▷ Question numéro 2 :

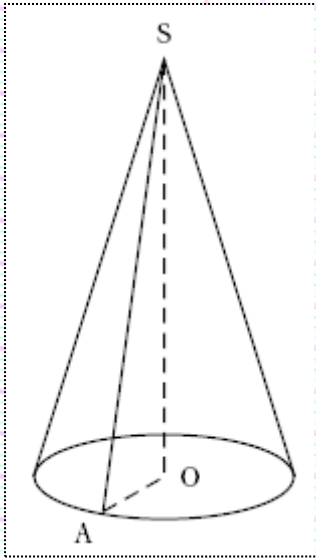
Il y a 2 boules portant le numéro 2 sur 6 boules. La probabilité de tirer une boule portant le numéro 2 est $\frac{2}{6}$, soit $\frac{1}{3}$.

▷ Question numéro 3 :

Il y a 2 boules blanches portant le numéro 1 sur 6 boules au total. La probabilité de tirer une boule blanche portant le numéro 1 est $\frac{2}{6}$, soit $\frac{1}{3}$.

Numéro	Question	Réponse	Réponse B	Réponse C
1	Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche ?	$\frac{2}{3}$	$\frac{6}{4}$	4
2	Quelle est la probabilité de tirer une boule portant le numéro 2 ?	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
3	Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche numérotée 1 ?	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{6}$

ACTIVITES GEOMETRIQUES (12 points)



EXERCICE 1 :

1. Nature du triangle SAO :

Le triangle SAO est un triangle rectangle en O.

2. Calcul de la hauteur SO de la bougie :

Dans le triangle OAS rectangle en O , nous avons d'après le théorème de Pythagore

$$AS^2 = OA^2 + OS^2$$

$$6,5^2 = 2,5^2 + OS^2$$

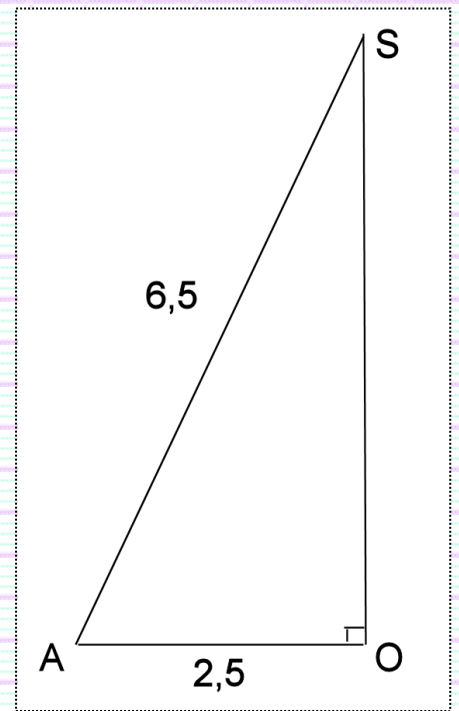
$$42,25 = 6,25 + OS^2$$

$$42,25 - 6,25 = OS^2$$

$$36 = OS^2$$

$$\text{donc } OS = \sqrt{36} = 6$$

La hauteur de la bougie est 6 cm.



3. Volume de cire nécessaire à la fabrication de cette bougie :

Le volume est :

$$V_{\text{bougie}} = \frac{\pi \times 2,5^2 \times 6}{3}$$

$$V_{\text{bougie}} = \frac{\pi \times 6,25 \times 2 \times 3}{3} = \pi \times 6,25 \times 2 = \pi \times 12,5 = 12,5 \pi \approx 39,3 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{bougie}} \approx 39,3 \text{ cm}^3$$

4. Calcul de l'angle $\hat{A}SO$

Dans le triangle OAS rectangle en O , nous avons :

$$A_{\text{ARM}} = \frac{10 \times 10}{3,5 \times 10} = \frac{100}{35} \approx 2,85 \text{ (cm)}$$

$$\sin(\hat{A}SO) = \frac{2,5}{6,5}$$

Il suffit, avec la calculatrice, de taper

$$\sin^{-1} (2,5 \div 6,5) =$$

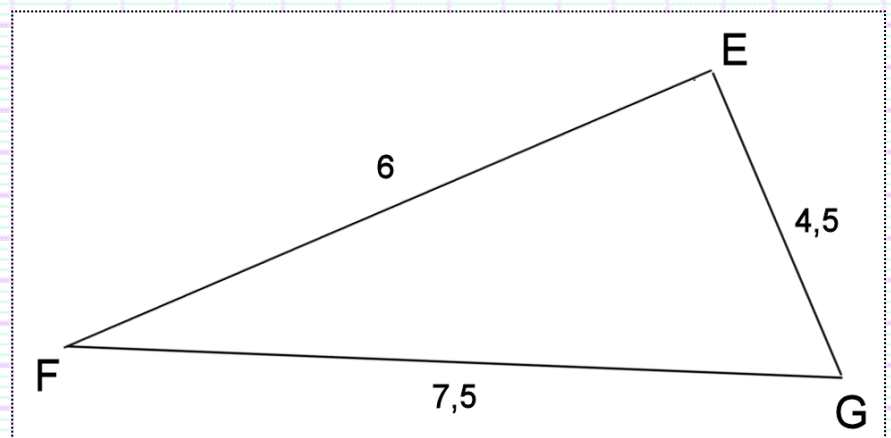
Nous avons alors $\hat{A}SO \approx 23^\circ$

$$\hat{A}SO \approx 23^\circ$$

EXERCICE 2 :

1. Construction du triangle EFG :

Cette construction est laissée au soin du lecteur.



2. Nature du triangle EFG :

Nous avons (calculs séparés) :

$$FG^2 = 7,5^2 = 56,25$$

$$EF^2 + EG^2 = 6^2 + 4,5^2 = 36 + 20,25 = 56,25$$

Donc $FG^2 = EF^2 + EG^2$

Donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle EFG est rectangle en E.

Le triangle EFG est rectangle en E

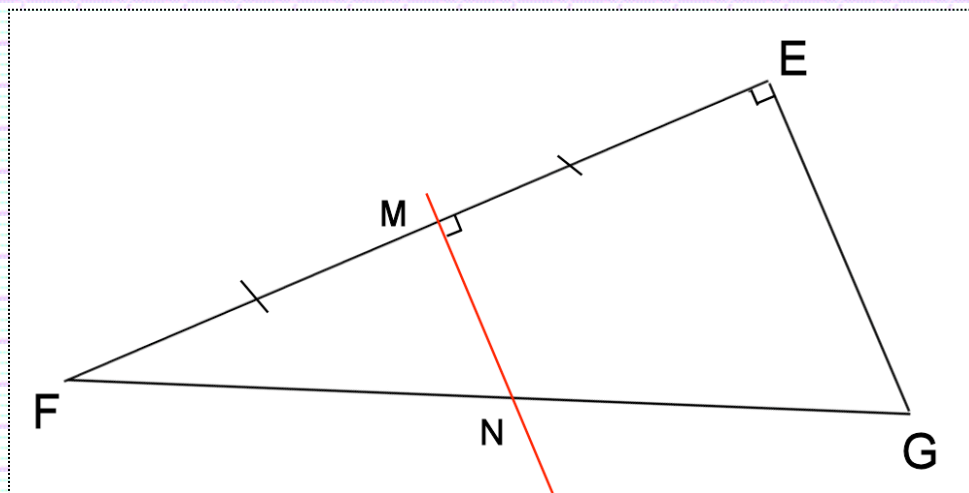
3. Construction de M milieu de [EF] et de la parallèle à [EG] passant par M :

Pour construire le milieu M de [EG], il suffit de tracer la médiatrice de ce segment [EG].

Mais, en traçant cette médiatrice, nous traçons une droite perpendiculaire à (EF) passant par M.

Comme (EG) est également perpendiculaire à (EF) (EFG est un triangle rectangle), la médiatrice que nous venons de tracer et la droite (EG) sont parallèles (droites perpendiculaires à une même troisième).

La médiatrice est donc la droite parallèle à [EG] passant par M



4. N est le milieu de [FG] ?

Dans le triangle FEG,

M milieu de [EF] (hypothèse)

(MN) || (EG) (hypothèse)

Donc, d'après la **réciproque du théorème des milieux**, nous avons :

N milieu de [FG]

N milieu de [FG]

PROBLEME (12 points)

Les longueurs sont exprimées en centimètres.

1. Dans cette question, on se place dans le cas où

$x = 1$

a. Figure :

(Figure laissée au soin du lecteur)

b. Nature du triangle ARM :

Nous avons :

$$MA = PA - AM \quad (M \text{ est un point du segment } [PA])$$

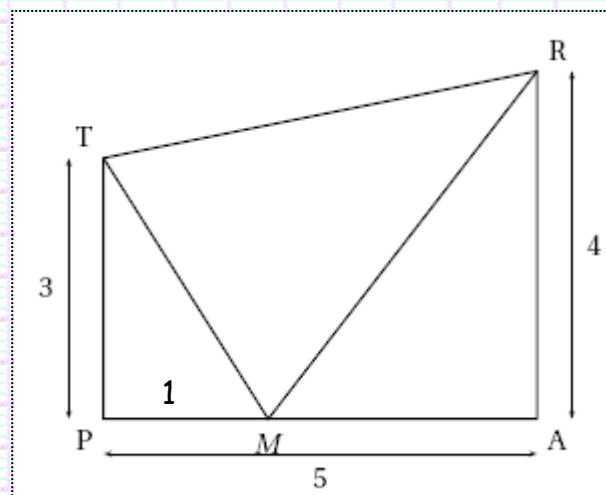
$$\text{Donc } MA = 5 - 1 = 4$$

Dans le triangle AMR, nous avons :

$$AM = AR = 4$$

Donc

le triangle AMR est isocèle en A.



c. Aires des triangles PTM et ARM :

▷ Aire du triangle PTM :

PTM est un triangle rectangle en P. Son aire est égale à :

$$A_{PTM} = \frac{TP \times PM}{2} = \frac{3 \times 1}{2} = \frac{3}{2} = 1,5 \text{ (cm}^2 \text{)}$$

▷ Aire du triangle ARM :

ARM est un triangle rectangle en A. Son aire est égale à :

$$A_{ARM} = \frac{AR \times AM}{2} = \frac{4 \times 4}{2} = \frac{16}{2} = 8 \text{ (cm}^2 \text{)}$$

2. Dans cette question, on se place dans le cas où x est un nombre inconnu.

a. Encadrement de x :

M est un point du segment [PA], donc M peut se déplacer de P ($x = 0$) à A ($x = 5$).

$$0 \leq x \leq 5$$

$$0 \leq x \leq 5$$

b Aires des triangles PTM et ARM :

▷ Aire du triangle PTM :

PTM est un triangle rectangle en P. Son aire est égale à :

$$A_{PTM} = \frac{TP \times PM}{2} = \frac{3 \times x}{2} = \frac{3}{2}x = 1,5x \text{ (cm}^2 \text{)}$$

▷ Aire du triangle ARM :

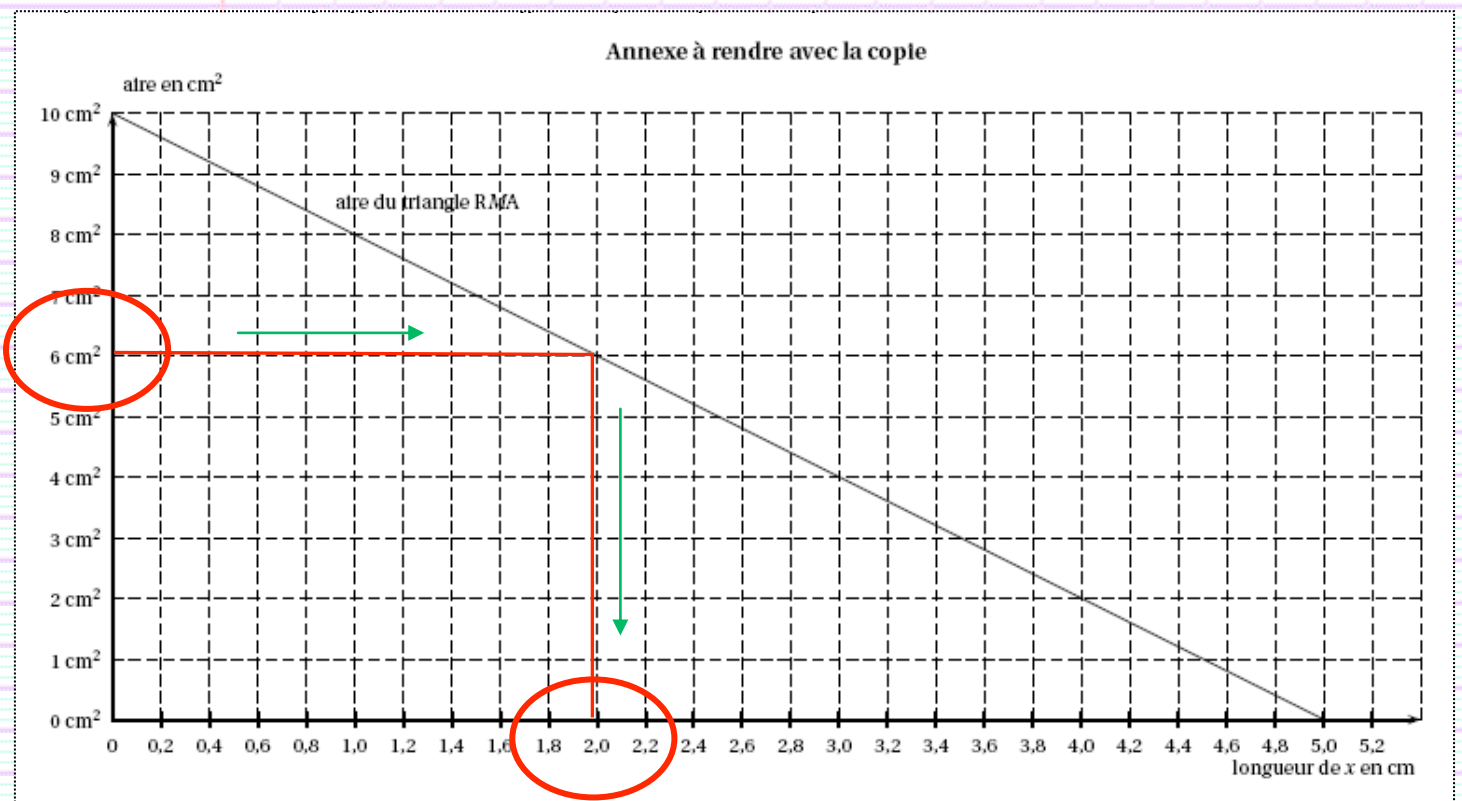
ARM est un triangle rectangle en A. Son aire est égale à :

$$A_{ARM} = \frac{AR \times AM}{2} = \frac{4 \times (5-x)}{2} = \frac{2 \times 2 \times (5-x)}{2} = 2 \times (5-x) = 10 - 2x \text{ (cm}^2 \text{)}$$

L'aire du triangle PTM est $1,5x$ et l'aire du triangle ARM est $10 - 2x$.

La représentation graphique, dans le plan rapporté à un repère orthogonal, de la fonction représentant l'aire du triangle ARM en fonction de x est donnée en annexe.

3. a. Aire du triangle ARM égale à 6 cm^2 :

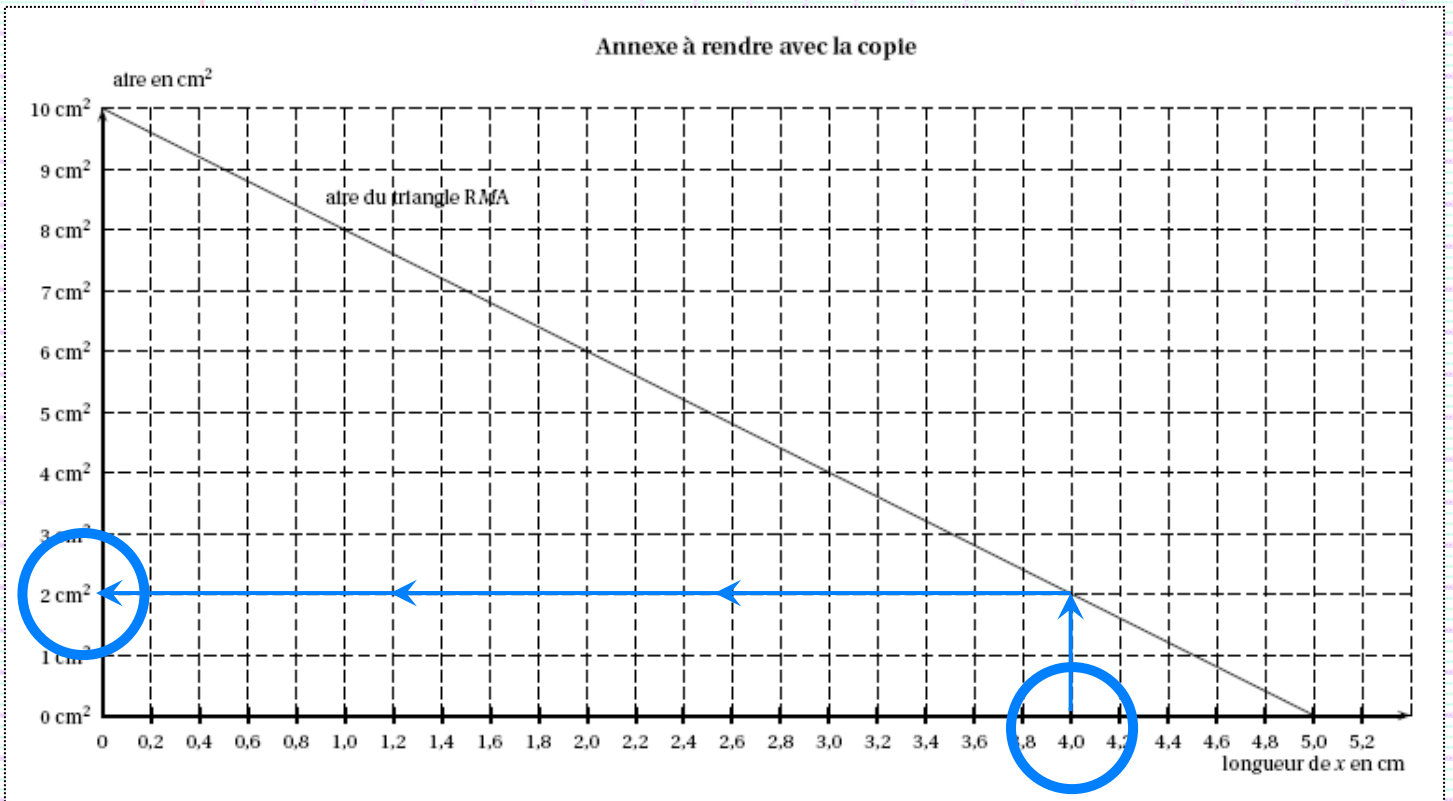


Pour $x = 2$ (cm), l'aire du triangle ARM est égale à 6 cm^2

Remarque : Vérification (à ne pas écrire sur la copie)

Si $x = 2$, l'aire du triangle ARM est égale à $10 - 2 \times 2 = 10 - 4 = 6$ (cm^2)

b) Aire du triangle ARM pour $x = 4$:



Si $x = 4$ (cm), l'aire du triangle ARM est égale à 2 cm^2

Remarque : Vérification (à ne pas écrire sur la copie)

Si $x = 4$, l'aire du triangle ARM est égale à $10 - 2 \times 4 = 10 - 8 = 2$ (cm^2)

4. a Tracé de la droite, représentation graphique de la fonction : $x \mapsto 1,5x$:

Cette fonction est une fonction linéaire. Sa représentation graphique est une droite passant par l'origine. Il suffit donc de déterminer les coordonnées d'un seul point de cette droite.

Si $x = 4$, alors $f(4) = 1,5 \times 4 = 6$

La droite représentant la fonction f passe donc par le point de coordonnées $A(4 ; 6)$

(Voir dessin ci-dessous)

Remarque :

Nous pouvons également constater que la fonction f représente l'aire du triangle PTM. Nous savons (question 1c) que si $x = 1$, l'aire du triangle est égale à 1,5.

Le point de coordonnées $(1 ; 1,5)$ est un point de la droite cherchée.

Mais ce point est « proche » de l'origine. C'est pourquoi il est préférable de prendre le point A défini ci-dessus.

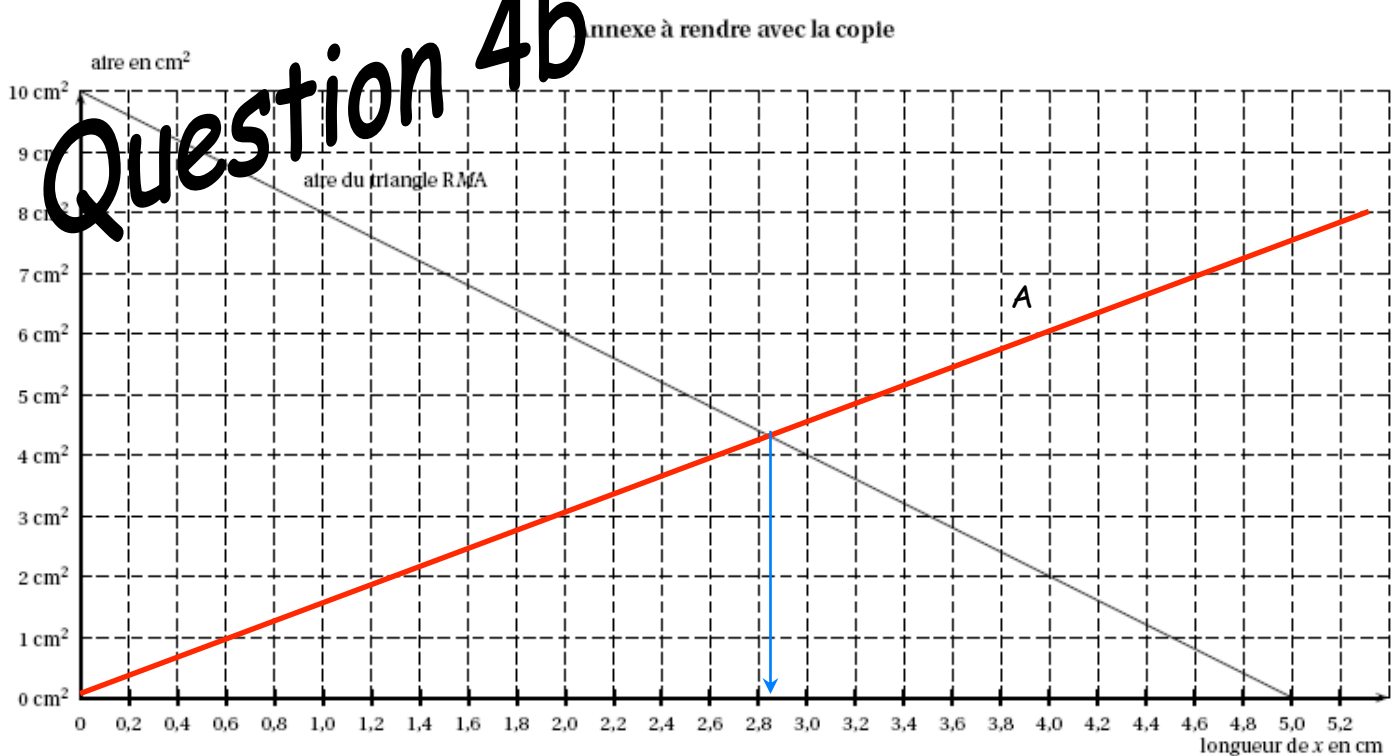
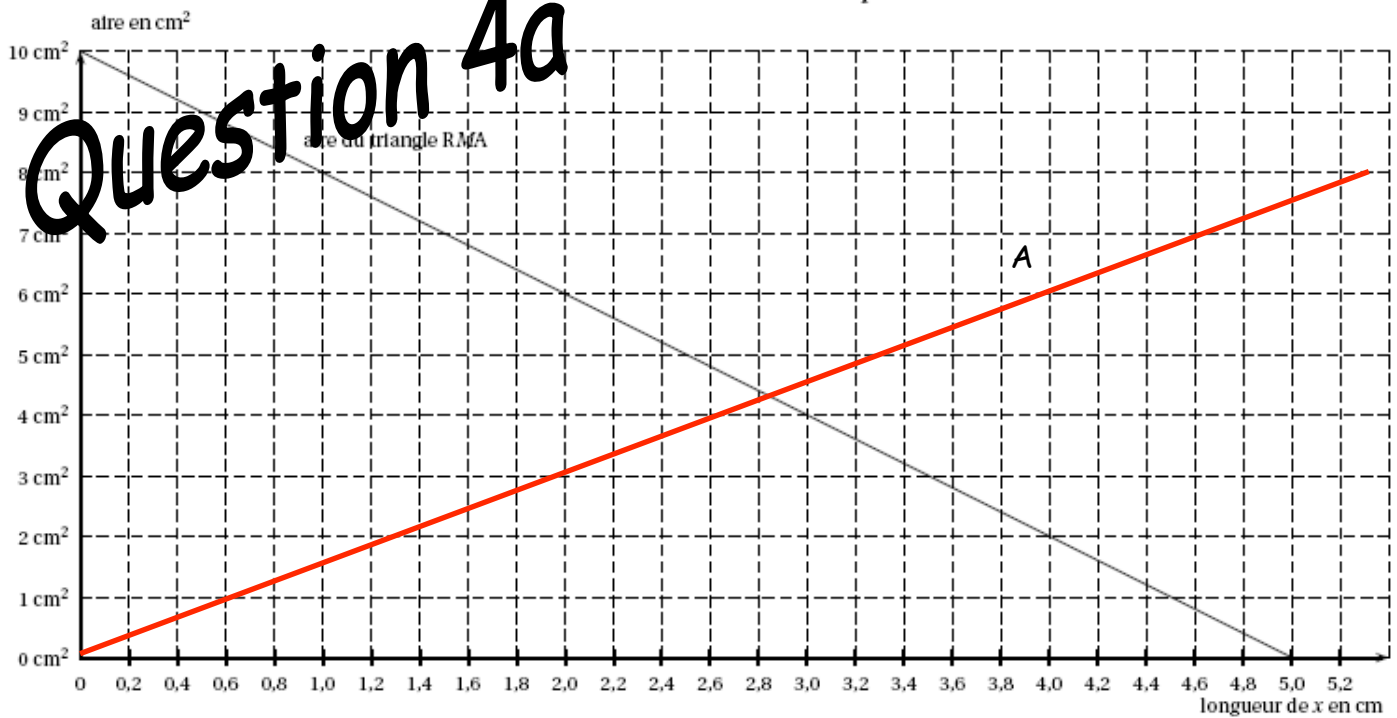
b) Egalité des aires des triangles PTM et ARM :

Les aires (images de x dans les deux fonctions) seront égales pour la valeur de x correspondant au point d'intersection.

D'après le graphique, la valeur de x est comprise entre 2,8 cm et 2,9 cm.

ou

Pour $x \approx 2,8$ (cm) les aires des deux triangles sont égales.
Pour $x \approx 2,9$ (cm) les aires des deux triangles sont égales.



c. Recherche de la valeur exacte :

Les aires des deux triangles sont égales si

$$10 - 2x = 1,5x$$

Donc : $10 = 1,5x + 2x$

$$10 = 3,5x$$

$$\frac{10}{3,5} = x \text{ soit } x = \frac{10}{3,5} = \frac{10 \times 10}{3,5 \times 10} = \frac{100}{35}$$

$$\left(= \frac{5 \times 20}{5 \times 7} = \frac{20}{7} ? \right)$$

$$x = \frac{100}{35}$$

Remarquons que $\frac{100}{35} \approx 2,85(\text{cm})$ soit 2,8 cm (par défaut)