BREVET 8

PONDICHERY – AVRIL 2009

CORRECTION

ACTIVITES NUMERIQUES (12 points)

EXERCICE 1 :

1. Calcul de A :

$$A=\frac{7}{15}-\frac{4}{15}\times\frac{5}{8}$$

Nous avons (la multiplication est prioritaire) :

$$A=\frac{7}{15}-\frac{4\times5}{15\times8}$$

$$A=\frac{7}{15}-\frac{\cancel{4}\times\cancel{5}}{3\times\cancel{5}\times2\times\cancel{4}}$$

$$A=\frac{7}{15}-\frac{1}{6}=\frac{14}{30}-\frac{5}{30}=\frac{9}{30}=\frac{3\times3}{3\times10}=\frac{3}{10}$$

$A=\frac{3}{10}$

2. Calcul de B :

$$B=3\sqrt{2}-\sqrt{98}$$

a) Valeur arrondie au centième de B :

Généralement, cette question apparaît après le calcul. Nous allons donc, à l'aide de la calculatrice « calculer » cette expression :

$\boxed{3}\ \boxed{\times}\ \boxed{\sqrt{}}\ \boxed{2}\ \boxed{-}\ \boxed{\sqrt{}}\ \boxed{9}\ \boxed{8}\ \boxed{=}$

Le résultat est - 5.656 soit $B \approx -5{,}66$

b) Calcul de B :

$$B=3\sqrt{2}-\sqrt{98}$$

$$B=3\sqrt{2}-\sqrt{49}\sqrt{2} = 3\sqrt{2} - 7\sqrt{2} = -4\sqrt{2}$$

$B = -4\sqrt{2}$

EXERCICE 2 :

1. – 2 est-il solution de l'inéquation : $3x + 12 < 4 - 2x$?

Méthode 1 : Calculons séparément les deux membres de cette inéquation , en remplaçant x par – 2 .

Nous avons :

$3x + 12 = 3 \times (- 2) = 12 = - 6 + 12 = 6$

et

$4 - 2x = 4 - 2 \times (- 2) = 4 + 4 = 8$

Or $6 < 8$, donc – 2 est une solution de l'inéquation donnée.

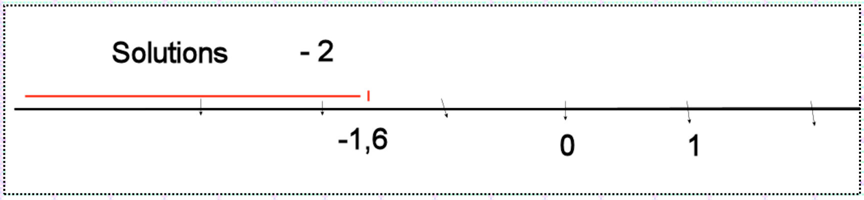
Méthode 2 : Il suffit de résoudre l'inéquation !

$3x + 12 < 4 - 2x$

$3x + 2x < 4 - 12$

$5x < - 8$

$x < \frac{-8}{5}$ soit $x < -1{,}6$



2 est donc solution de cette inéquation.

2. –2 est-il solution de l'équation : $(x - 2)(2x + 1) = 0$?

Méthode 1 : Calculons séparément le premier membre de cette $(x - 2)(2x + 1)$ équation , en remplaçant x par – 2 .

Nous avons :

$$(x - 2)(2x + 1) = (-2 - 2)(2 \times (-2) + 1) = -4 \times (-4 + 1) = -4 \times (-3) = 12$$

Or $12 \neq 0$, donc – 2 n'est pas solution de l'équation donnée.

Méthode 2 : Il suffit de résoudre l'inéquation !

$(x - 2)(2x + 1) = 0$

Donc :

$x - 2 = 0$ ou $2x + 1 = 0$

$x = 2$ ou $2x = -1$

$x = 2$ ou $x = -\frac{1}{2}$

Les solutions de cette équation sont 2 et $-\frac{1}{2}$. Donc le nombre – 2 n'est pas solution de cette équation.

3. –2 est-il solution de l'équation : $x^3 + 8 = 0$?

Nous ne savons pas résoudre cette équation à notre niveau.

Le seul moyen est donc de remplacer x par – 2 et de vérifier si égalité il y a.

$$x^3 + 8 = (-2)^3 + 8 = -8 + 8 = 0$$

Donc – 2 est solution de l'équation donnée.

4. Le couple (–2 ; 1) est-il solution du système $\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ x + 5y = 3 \end{cases}$

Nous avons comme précédemment deux méthodes : soit vérifier que le couple (- 2 ; 1) est solution de la première et de la deuxième équation, soit résoudre le système et …conclure.

Nous utiliserons la première méthode :

▷ (- 2 ; 1) est-il solution de la première équation ?

Calculons le premier membre :

$$2x + 3y = 2 \times (-2) + 3 \times 1 = -4 + 3 = -1$$

Nous trouvons – 1, donc le couple (- 2 ; 1) est solution de la première équation.

▷ (- 2 ; 1) est-il solution de la deuxième équation ?

Calculons le premier membre :

$$x + 5y = -2 + 5 \times 1 = -2 + 5 = 3$$

Nous trouvons 3, donc le couple (- 2 ; 1) est solution de la deuxième équation.

▷ (- 2 ; 1) est donc solution du système

(- 2 ; 1) est donc solution du système

EXERCICE 3 :

1. PGCD de 238 et 170 :

Utilisons l'algorithme d'Euclide.
Nous avons :

Premier nombre	Deuxième nombre	Reste dans la division euclidienne	
238	170	150	$238 = 170 \times 1 + 68$
170	68	34	$170 = 68 \times 2 + 34$
68	34	0	$68 = 34 \times 2$

Donc :

P.G.C.D. (238 ; 170) = 34

2. Forme irréductible de la fraction $\frac{170}{238}$:

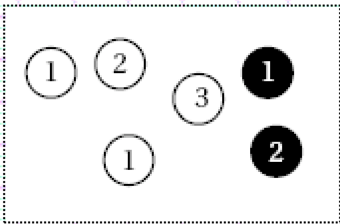
$$\frac{170}{238} = \frac{34 \times 5}{34 \times 7} = \frac{5}{7}$$

$$\frac{170}{238} = \frac{5}{7}$$

EXERCICE 4 :

Énoncé :

Un sac contient six boules : quatre blanches et deux noires. Ces boules sont numérotées :
Les boules blanches portent les numéros 1 ; 1 ; 2 et 3 et les noires portent les numéros 1 et 2.



▷ Question numéro 1 :

Il y a 4 boules blanches sur 6 boules. La probabilité de tirer une boule blanche est $\frac{4}{6}$ soit, en simplifiant $\frac{2}{3}$.

▷ Question numéro 2 :

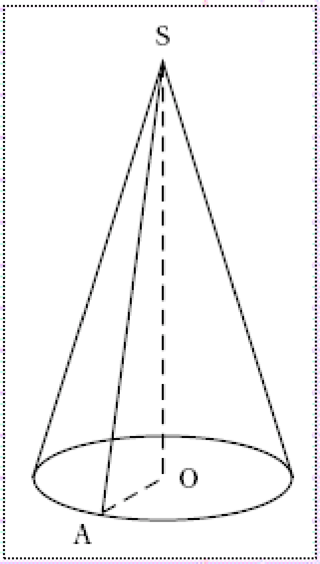
Il y a 2 boules portant le numéro 2 sur 6 boules. La probabilité de tirer une boule portant le numéro 2 est $\frac{2}{6}$, soit $\frac{1}{3}$

▷ Question numéro 3 :

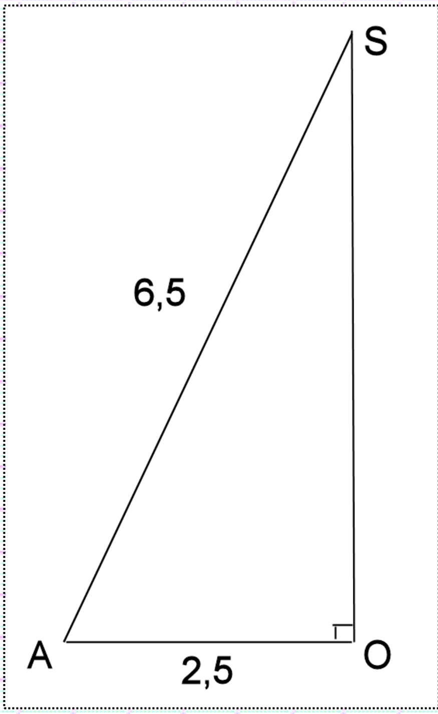
Il y a 2 boules blanches portant le numéro 1 sur 6 boules au total. La probabilité de tirer une boule blanche portant le numéro 1 est $\frac{2}{6}$, soit $\frac{1}{3}$

Numéro	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche ?	$\frac{2}{3}$	$\frac{6}{4}$	4
2	Quelle est la probabilité de tirer une boule portant le numéro 2 ?	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
3	Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche numérotée 1 ?	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{6}$

ACTIVITES GEOMETRIQUES (12 points)



EXERCICE 1 :



1. Nature du triangle SAO :

Le triangle SAO est un triangle rectangle en O.

2. Calcul de la hauteur SO de la bougie :

Dans le triangle OAS rectangle en O ,
nous avons d'après le théorème de Pythagore

$AS^2 = OA^2 + OS^2$

$6{,}5^2 = 2{,}5^2 + OS^2$

$42{,}25 = 6{,}25 + OS^2$

$42{,}25 - 6{,}25 = OS^2$

$36 = OS^2$

donc $OS = \sqrt{36} = 6$

La hauteur de la bougie est 6 cm.

3. Volume de cire nécessaire à la fabrication de cette bougie :

Le volume est :

$$V_{bougie} = \frac{\pi \times 2{,}5^2 \times 6}{3}$$

$$V_{bougie} = \frac{\pi \times 6{,}25 \times 2 \times 3}{3} = \pi \times 6{,}25 \times 2 = \pi \times 12{,}5 = 12{,}5\,\pi \approx 39{,}3\,cm^3$$

$V_{bougie} \approx 39{,}3\ cm^3$

4. Calcul de l'angle $A\hat{S}O$

Dans le triangle OAS rectangle en O ,nous avons :

$$A_{ARM} = \frac{10 \times 10}{3{,}5 \times 10} = \frac{100}{35} \approx 2{,}85(cm)$$

$$\sin(A\hat{S}O) = \frac{2{,}5}{6{,}5}$$

Il suffit, avec la calculatrice, de taper

$\boxed{\sin^{-1}}\ \boxed{(}\ \boxed{2}\ \boxed{,}\ \boxed{5}\ \boxed{\div}\ \boxed{6}\ \boxed{,}\ \boxed{5}\ \boxed{)}\ \boxed{=}$

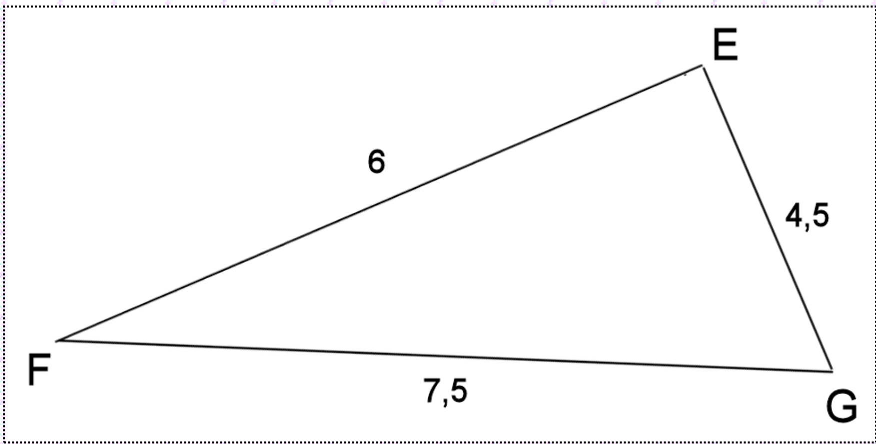
Nous avons alors $A\hat{S}O \approx 23°$

$A\hat{S}O \approx 23°$

EXERCICE 2 :

1. Construction du triangle EFG :

Cette construction est laissée au soin du lecteur.



2. Nature du triangle EFG :

Nous avons (calculs séparés) :

$FG^2 = 7{,}5^2 = 56{,}25$

$EF^2 + EG^2 = 6^2 + 4{,}5^2 = 36 + 20{,}25 = 56{,}25$

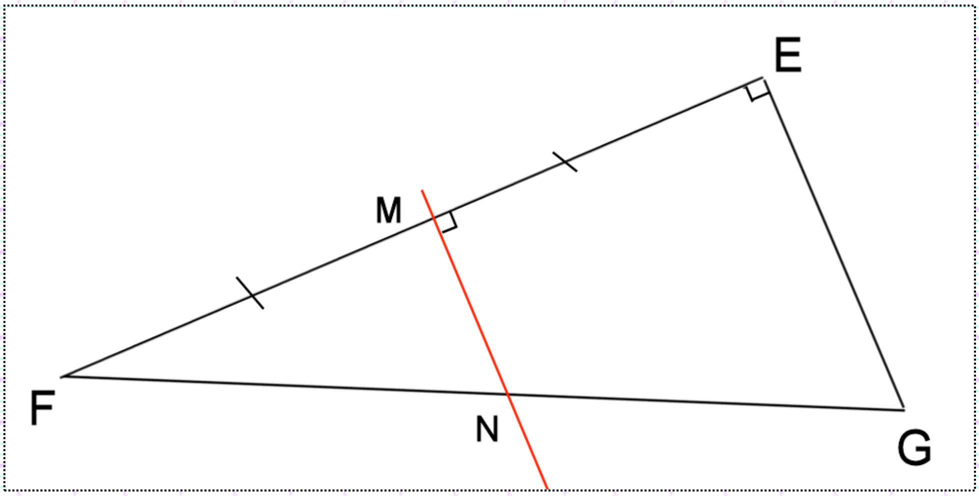
Donc $FG^2 = EF^2 + EG^2$

Donc , d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle EFG est rectangle en E.

Le triangle EFG est rectangle en E

3. Construction de M milieu de [EF] et de la parallèle à [EG] passant par M :

Pour construire le milieu M de [EG], il suffit de tracer la médiatrice de ce segment [EG].
Mais, en traçant cette médiatrice, nous traçons une droite perpendiculaire à (EF) passant par M.
Comme (EG) est également perpendiculaire à (EF) (EFG est un triangle rectangle) , la médiatrice que nous venons de tracer et la droite (EG) sont parallèles (droites perpendiculaires à une même troisième).
La médiatrice est donc la droite parallèle à [EG] passant par M



4. N est le milieu de [FG] ?

Dans le triangle FEG,

M milieu de [EF] (hypothèse)

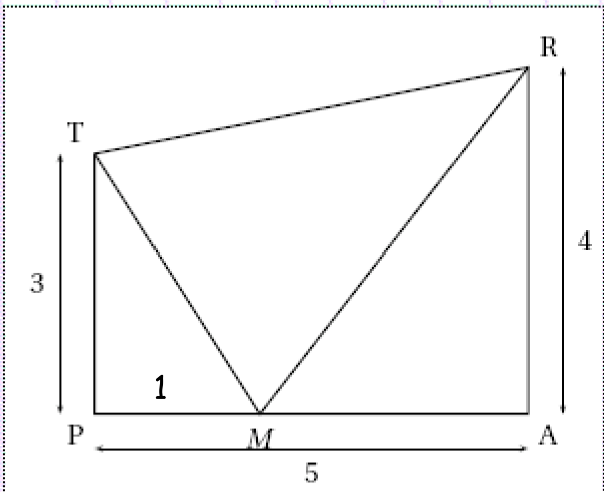
(MN) || (EG) (hypothèse)

Donc, d'après la réciproque du théorème des milieux, nous avons :

N milieu de [FG]

N milieu de [FG]

PROBLEME (12 points)



Les longueurs sont exprimées en centimètres.

1. Dans cette question, on se place dans le cas où $x = 1$

a. Figure :

(Figure laissée au soin du lecteur)

b. Nature du triangle ARM :

Nous avons :

MA = PA – AM (M est un point du segment [PA])

Donc MA = 5 – 1 = 4

Dans le triangle AMR , nous avons :

AM = AR = 4

Donc le triangle AMR est isocèle en A.

c. Aires des triangles PTM et ARM :

▷ Aire du triangle PTM :

PTM est un triangle rectangle en P. Son aire est égale à :

$$A_{PTM} = \frac{TP \times PM}{2} = \frac{3 \times 1}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5 \ (cm^2)$$

▷ Aire du triangle ARM :

ARM est un triangle rectangle en A. Son aire est égale à :

$$A_{ARM} = \frac{AR \times AM}{2} = \frac{4 \times 4}{2} = \frac{16}{2} = 8 \ (cm^2)$$

2. Dans cette question, on se place dans le cas où x est un nombre inconnu.

a. Encadrement de x :

M est un point du segment [PA] , donc M peut se déplacer de P ($x = 0$) à A ($x = 5$).

$$0 \leq x \leq 5$$

$0 \leq x \leq 5$

b Aires des triangles PTM et ARM :

▷ Aire du triangle PTM :

PTM est un triangle rectangle en P. Son aire est égale à :

$$A_{PTM} = \frac{TP \times PM}{2} = \frac{3 \times x}{2} = \frac{3}{2} x = 1{,}5x \qquad (cm^2)$$

▷ Aire du triangle ARM :

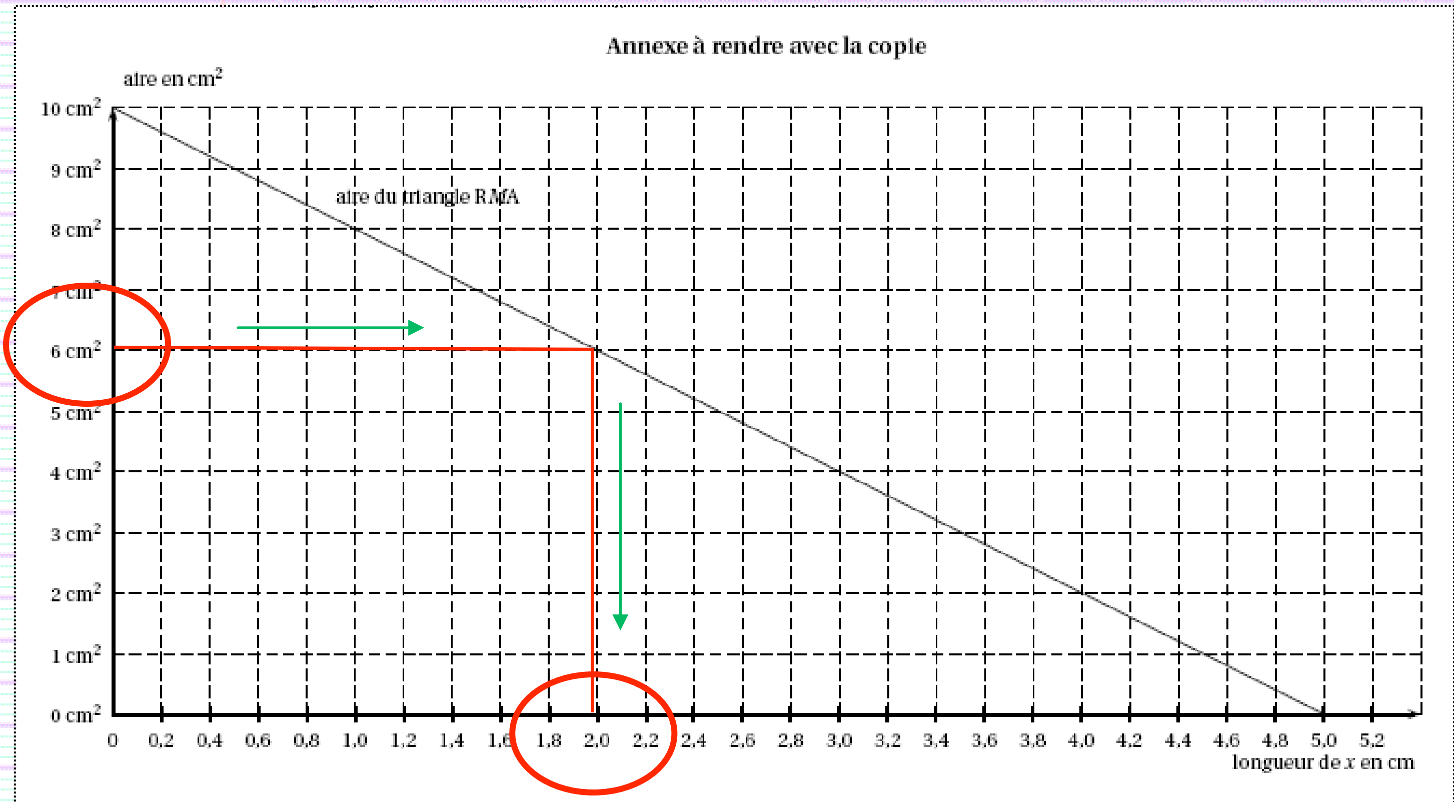
ARM est un triangle rectangle en A. Son aire est égale à :

$$A_{ARM} = \frac{AR \times AM}{2} = \frac{4 \times (5 - x)}{2} = \frac{2 \times 2 \times (5 - x)}{2} = 2 \times (5 - x) = 10 - 2x \qquad (cm^2)$$

L'aire du triangle PTM est $1{,}5x$ et l'aire du triangle ARM est $10 - 2x$.

La représentation graphique, dans le plan rapporté à un repère orthogonal, de la fonction représentant l'aire du triangle ARM en fonction de x est donnée en annexe.

3. a. Aire du triangle ARM égale à 6 cm^2 :

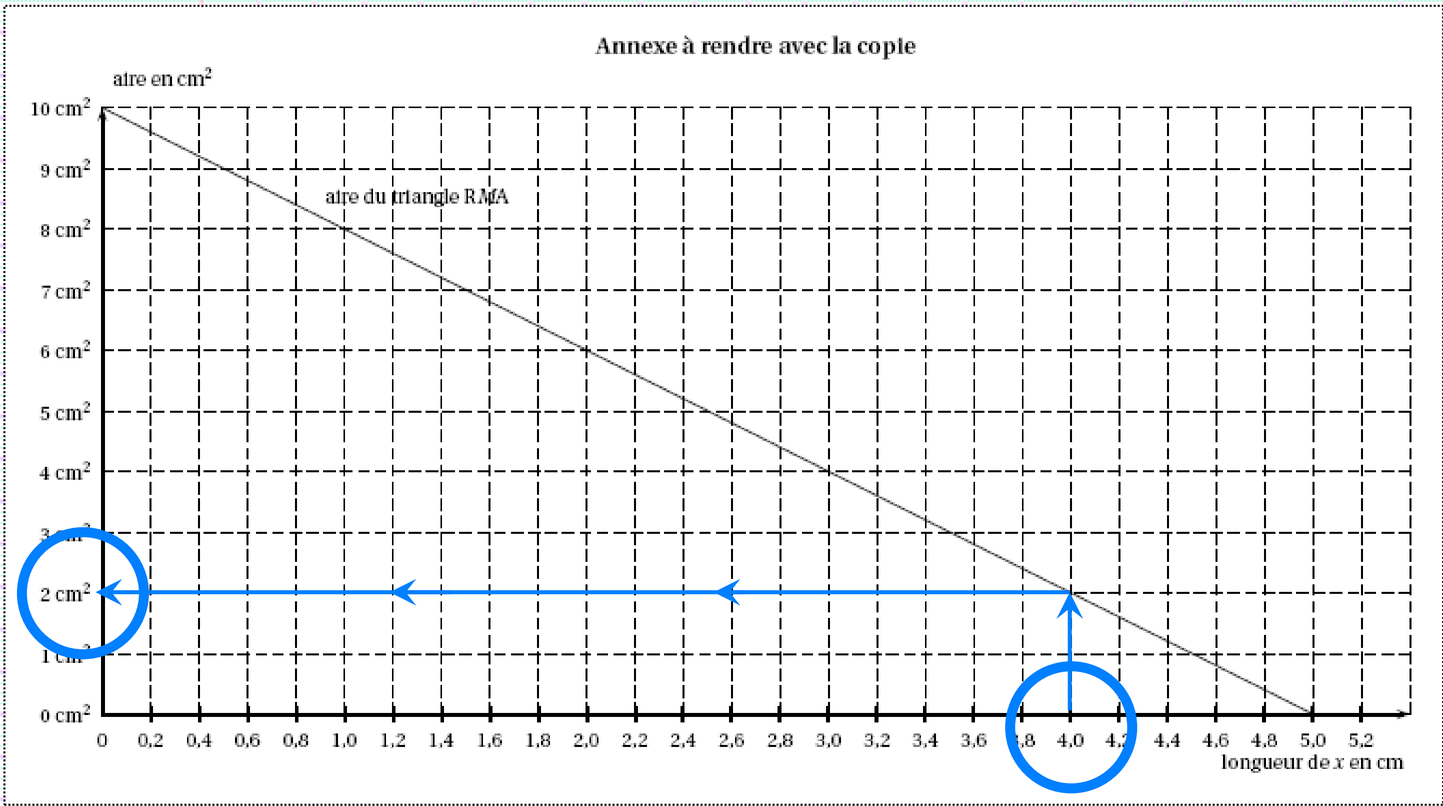


Pour x = 2 (cm), l'aire du triangle ARM est égale à 6 cm²

Remarque : Vérification (à ne pas écrire sur la copie)

Si x = 2 , l'aire du triangle ARM est égale à $10 - 2 \times 2 = 10 - 4 = 6$ (cm²)

b) Aire du triangle ARM pour x = 4 :



Si x = 4 (cm), l'aire du triangle ARM est égale à 2 cm²

Remarque : Vérification (à ne pas écrire sur la copie)

Si x = 4 , l'aire du triangle ARM est égale à $10 - 2 \times 4 = 10 - 8 = 2$ (cm²)

4. a Tracé de la droite, représentation graphique de la fonction : $x \longmapsto 1{,}5x$:

Cette fonction est une fonction linéaire. Sa représentation graphique est une droite passant par l'origine.
Il suffit donc de déterminer les coordonnées d'un seul point de cette droite.
Si x = 4 , alors $f(4) = 1{,}5 \times 4 = 6$
La droite représentant la fonction f passe donc par le point de coordonnées A (4 ; 6)
(Voir dessin ci-dessous)

Remarque :

Nous pouvions également constater que la fonction f représente l'aire du triangle PTM. Nous savons (question 1c) que si x = 1 , l'aire du triangle est égale à 1,5.
Le point de coordonnées (1 ; 1,5) est un point de la droite cherchée.
Mais ce point est « proche » de l'origine. C'est pourquoi il est préférable de prendre le point A défini ci-dessus.

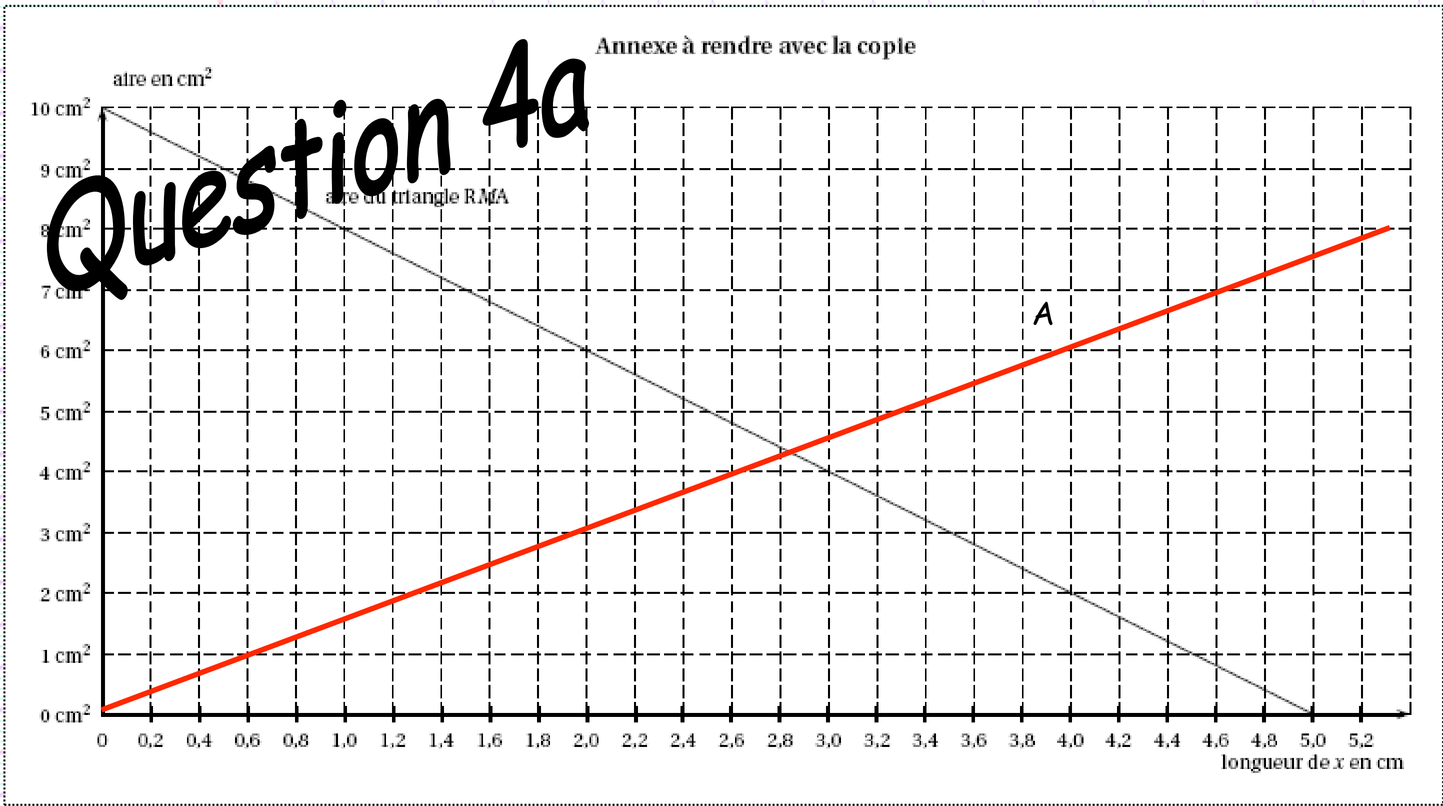
b) Egalité des aires des triangles PTM et ARM :

Les aires (images de x dans les deux fonctions) seront égales pour la valeur de x correspondant au point d'intersection.
D'après le graphique, la valeur de x est comprise entre 2,8 cm et 2,9 cm.

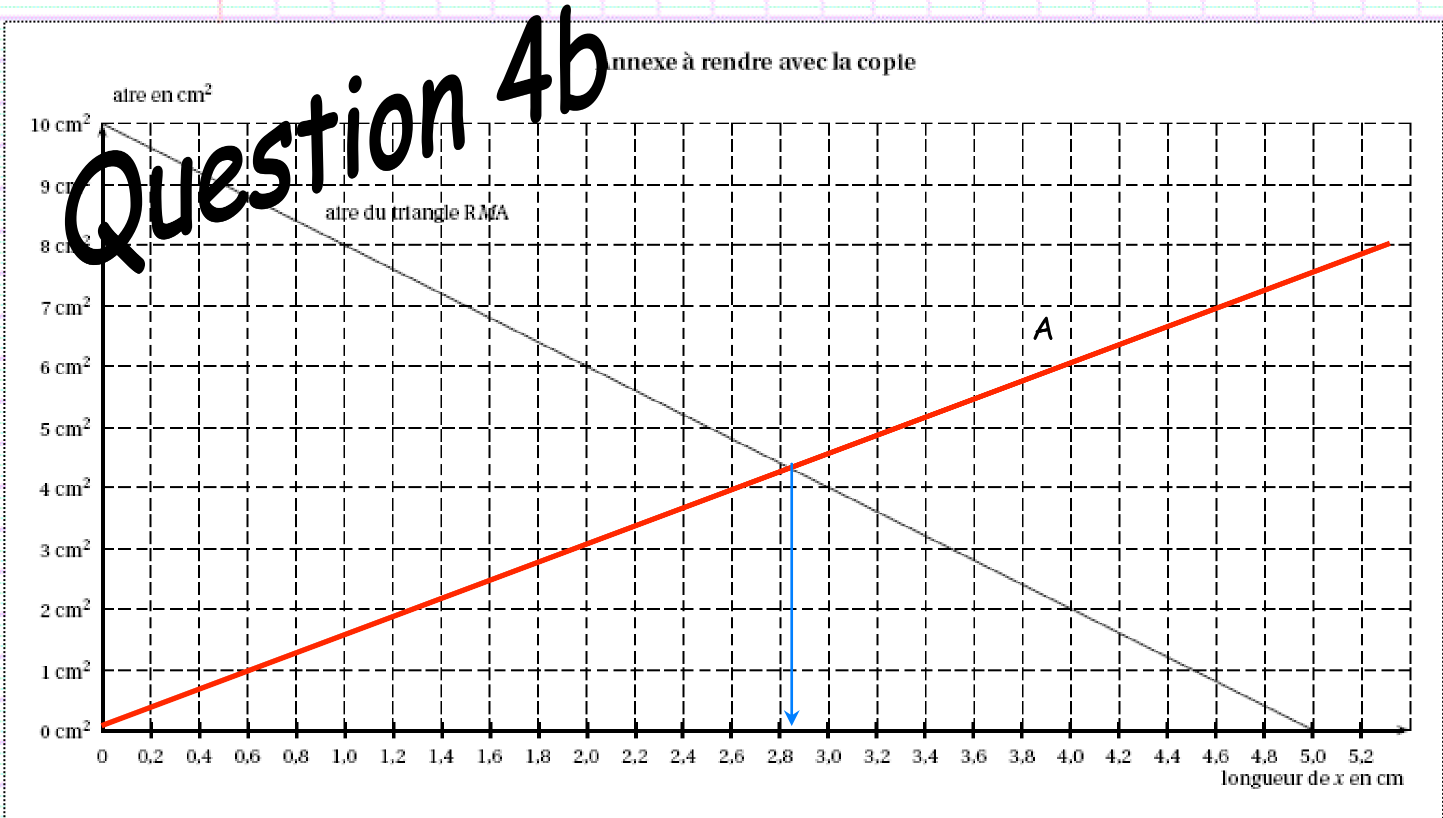
Pour $x \approx 2{,}8$ (cm) les aires des deux triangles sont égales.

ou Pour $x \approx 2{,}9$ (cm) les aires des deux triangles sont égales.

Question 4a



Question 4b



c. Recherche de la valeur exacte :

Les aires des deux triangles sont égales si

$10 - 2x = 1{,}5x$

Donc : $10 = 1{,}5x + 2x$

$10 = 3{,}5x$

$\frac{10}{3{,}5} = x$ soit $x = \frac{10}{3{,}5} = \frac{10 \times 10}{3{,}5 \times 10} = \frac{100}{35}$ $\left(= \frac{5 \times 20}{5 \times 7} = \frac{20}{7} \text{ ?} \right)$ $x = \frac{100}{35}$

Remarquons que $\frac{100}{35} \approx 2{,}85$(cm) soit 2,8 cm (par défaut)